Anneaux. Divisibilité et irréductibilité.

Tous les anneaux, sauf mention explicite du contraire, sont supposés commutatifs.

Exercice 1.

1. C'est du cours, et dans $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$, 2 est irréductible (utiliser le module) mais pas premier (car 2 divise $6 = (1+i\sqrt{5})(1-i\sqrt{5})$ mais aucun des facteurs, qui ne sont pas inversibles car de module > 1).
   Dans $\mathbb{Z}/6Z$, les inversibles sont 1 et 5. Puisque $2 = 2 \times 4$, 2 n'est pas irréductible. Cependant, 2 est premier, car en écrivant la table de multiplication, on remarque que les produits divisibles par 2 sont
   $$0 = 0 \times k \text{ pour tout } k \qquad 2 = 2 \times 1 = 2 \times 4 \qquad 4 = 2 \times 2 = 2 \times 4 = 2 \times 5$$
   et 2 divise toujours l'un des facteurs.
2. Soit n tel que $a^n = 0$. Alors $(1+a)\sum_{k=0}^{n-1}(-a)^k = 1$ par téléscopage. Donc $1+a$ est inversible.
3. Remarquer que $(1+2X)^2 = 1$.

Exercice 2.

1. Soit A un anneau. Déterminer tous les morphismes d'anneaux $\mathbb{Z} \to A$, $\mathbb{Z}[X] \to A$, $\mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$, puis $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$.
2. Soit $n \geqslant 1$ un entier. Déterminer tous les morphismes d'anneaux $\mathbb{Z}^n \to \mathbb{Z}$ puis $\mathbb{Q} \to \mathbb{Z}$.
3. Soit G un groupe abélien noté additivement. Montrer que l'ensemble A des morphismes de groupes $G \to G$ est naturellement muni d'une structure d'anneau (non commutatif). À quel anneau classique est-il isomorphe lorsque $G = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ avec $n \geqslant 1$ entier ?

Exercice 3.

Montrer que, quelque soit le corps $\mathbb{K}$, l'ensemble des polynômes irréductibles unitaires de $\mathbb{K}[X]$ est infini.

Exercice 4.

Soit A un anneau et I un ensemble.

1. Montrer que $\mathcal{F}(I, A)$ est un anneau, commutatif lorsque A l'est.
2. On suppose que I est un espace métrique. Montrer que $\mathcal{C}^0(I, \mathbb{R})$ est un sous-anneau de $\mathcal{F}(I, \mathbb{R})$.
3. Soit $x \in I$. Montrer que $f \in \mathcal{F}(I, A) \mapsto f(x) \in A$ est un morphisme d'anneaux.
4. Quels sont les diviseurs de 0 dans $\mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$?
5. Soient $x \in \mathbb{R}$ et $\mathfrak{m}_x = \{f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid f(x) = 0\}$.
   (a) Montrer que $\mathfrak{m}_x$ est un idéal maximal. Est-il principal ?
   (b) Que se passe-t-il si on considère $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$? $\mathbb{R}[X]$? $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$?
   (c) Identifier le quotient $\mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})/\mathfrak{m}_x$.
6. Identifier les éléments nilpotents de $\mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$?

7. Soient U un ouvert de $\mathbb{C}$ et $\mathcal{H}(U)$ l'espace des fonctions holomorphes sur U. Montrer que $\mathcal{H}(U)$ est un anneau, intègre si et seulement si U est connexe.

Exercice 5.

Soit $\mathbb{K}$ un corps. Une valuation discrète est une fonction surjective $v\colon \mathbb{K}^\times \to \mathbb{Z}$ telle que pour tous x et y non nuls, $v(xy) = v(x) + v(y)$ et $v(x+y) \geqslant \min\{v(x), v(y)\}$. On la prolonge par $v(0) = +\infty$ par convention.

1. Soit $p \in \mathbb{N}$ un nombre premier. Construire une valuation discrète v_p sur $\mathbb{Q}$ telle que $v_p(p) = 1$.
2. (a) Soient v une valuation discrète sur $\mathbb{K}$ et $r \in]0,1[$. Soit $d(x,y) = r^{v(x-y)}$ pour x et y dans $\mathbb{K}$. Montrer que pour tous x, y et $z \in \mathbb{K}$, on a $d(x,z) \leqslant \max\{d(x,y), d(y,z)\}$ (on dit que d est une distance *ultramétrique*).

   (b) Montrer que deux boules ouvertes pour cette distance sont soit disjointes, soit l'une des deux est incluse dans l'autre.

   (c) Calculer la limite de la suite $\left(\sum_{k=0}^{n} 2^k\right)_{n\geqslant 0}$ dans $\mathbb{Q}$ muni de la distance ultramétrique associée à v_2.
3. Montrer que si $\mathbb{K}$ est muni d'une valuation discrète v, alors $A = \{x \in \mathbb{K} \mid v(x) \geqslant 0\}$ est un sous-anneau de $\mathbb{K}$, tel que $A^\times = v^{-1}(0)$. Quels sont les anneaux obtenus dans le cas de la question 1 ?
4. Soit $\pi \in A$ tel que $v(\pi) = 1$.

   (a) Montrer que pour tout $a \in A$, il existe $u \in A^\times$, $n \in \mathbb{N}$ tels que $a = \pi^n u$. Montrer que u et n sont uniques.

   (b) En déduire que les idéaux de A sont de la forme (π^n) pour un certain $n \in \mathbb{N}$.