
 Anneaux, morphismes, idéaux.

Exercice 1.

1. On considère l'anneau $\mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Soient $x \in \mathbb{R}$ et $\mathfrak{m}_x = \{f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid f(x) = 0\}$.
 - (a) Montrer que \mathfrak{m}_x est un idéal maximal. Est-il principal ?
 - (b) Que se passe-t-il si on considère $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$? $\mathbb{R}[X]$? $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$?
 - (c) Identifier le quotient $\mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})/\mathfrak{m}_x$.
2. Identifier les éléments nilpotents de $\mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.
3. Soient U un ouvert de \mathbb{C} et $\mathcal{H}(U)$ l'espace des fonctions holomorphes sur U . Montrer que $\mathcal{H}(U)$ est un anneau, intègre si et seulement si U est connexe.

Exercice 2.

Soit $\varphi: A \rightarrow B$ un morphisme d'anneaux.

1. Montrer que l'image réciproque par φ d'un idéal de B est un idéal de A . Qu'en est-il pour un idéal premier ? Pour un idéal maximal ? Donner une condition sous laquelle l'image directe de tout idéal de A est un idéal de B .
2. Soient I et J idéaux de A et B respectivement, telles que $\varphi(I) \subset J$. Montrer que φ induit un morphisme d'anneaux $\bar{\varphi}: A/I \rightarrow B/J$. Dans quelle condition φ est injectif ?

Exercice 3.

Soit A un anneau et soient I, J deux idéaux de A .

1. Décrire les idéaux (quelconques, puis premiers et maximaux) de l'anneau quotient A/I .
2. Donner un isomorphisme naturel entre l'anneau $A/(I + J)$ et un quotient de A/I .

Exercice 4.

Soit A un anneau commutatif.

1. Soient I et J deux idéaux de A premiers entre eux. Montrer que pour tous entiers $n, m \geq 1$, les idéaux I^n et J^m sont premiers entre eux.
2. Soit I un idéal non premier de A . Montrer qu'il existe des idéaux I_1, I_2 de A distincts de I et A tels que l'on ait $I_1 I_2 \subset I \subset I_1 \cap I_2$.

Exercice 5.

1. Dans l'anneau $\mathbb{Q}[X]$, calculer le pgcd de $P = 2X^4 - 3X^2 + 1$ et $Q = X^3 + X^2 - X - 1$. Déterminer U et V tels que $UP + VQ = \text{pgcd}(P, Q)$. Même question dans $\mathbb{R}[X]$.
2. Montrer que $X^3 - X + 1$ est inversible dans $\mathbb{Q}[X]/(X^2 + X + 1)$, et déterminer son inverse.
3. Déterminer $\text{pgcd}(X^n - 1, X^m - 1)$.
4. Montrer que $\text{pgcd}(m, n) = 1$ si et seulement si m est inversible dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

Exercice 6.

Soit A un anneau commutatif et $a, b \in A$.

1. Montrer que a est inversible dans A si et seulement si $(a) = A$.
2. Montrer que a est un diviseur de b dans A si et seulement si $(b) \subset (a)$.
3. Supposons que A soit intègre.
 - (a) Montrer que a est premier dans A si et seulement si (a) est un idéal premier de A .
 - (b) Montrer que a est irréductible dans A si et seulement si (a) est maximal parmi les idéaux principaux de A . En déduire que lorsque tout idéal de A est principal, a est irréductible dans A si et seulement si (a) est un idéal maximal de A .