Anneaux noetheriens. Extension de corps.

Exercice 1.

Un idéal $I \subset A$ est dit irréductible si dès que $I = I_1 \cap I_2$ avec I_1, I_2 idéaux, alors $I = I_1$ ou $I = I_2$. Montrer que dans un anneau noethérien, tout idéal est une intersection finie d'idéaux irréductibles.

> Soit X l'ensemble des idéaux qui ne sont une intersection finie d'idéaux irréductibles. Supposons par l'absurde que X est non vide. Montrons que c'est un ensemble ordonné inductif pour l'inclusion. Soit $\{I_j\}_j$ une famille totalement ordonnée. Puisque A est supposé noethérien, c'est en fait une famille finie, et leur union est un idéal de la famille. C'est donc un majorant. Par le lemme de Zorn, X possède un élément maximal $\mathfrak{m}$. Puisque $\mathfrak{m} \in X$, on peut écrire $\mathfrak{m} = I \cap J$ avec $I, J \neq \mathfrak{m}$. Par maximalité de $\mathfrak{m}$, $I, J \notin X$, et par conséquent, I et J sont des intersections finies d'idéaux irréductibles. Donc $\mathfrak{m}$ aussi. Absurde.

Exercice 2.

Soit A un anneau noethérien.

1. Soit I un idéal de A. Montrer qu'il existe des idéaux premiers $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_n$ contenant I tels que $\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2 \cdots \mathfrak{p}_n \subset I$.

   > Soit X l'ensemble des idéaux qui ne contennant pas de produit fini d'idéaux premiers, et supposons X non vide. C'est un ensemble ordonné inductif (même démo que précédemment), et par Zorn, il contient un élément maximal $\mathfrak{m}$. Montrons que $\mathfrak{m}$ est un idéal premier. Soient x et y tels que $xy \in \mathfrak{m}$. Si, par l'absurde, $x, y \notin \mathfrak{m}$, alors $\mathfrak{m} + (x)$ et $\mathfrak{m} + (y)$ contiennent strictement $\mathfrak{m}$, et ne sont pas dans X. Ils contiennent par conséquent des produits d'idéaux premiers. Puisque $(\mathrm{m} + (x))(\mathfrak{m} + (y)) \subset \mathfrak{m}$, $\mathfrak{m}$ contient donc le poduit de ces produits d'idéaux premiers, absurde.

2. En déduire qu'il n'existe qu'un nombre fini d'idéaux premier minimaux pour l'inclusion.

   > Soient $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_n$ premiers tels que $\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2 \cdots \mathfrak{p}_n \subset (0)$. Soit $\mathfrak{p}$ un idéal premier non nul minimal. Alors $\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2 \cdots \mathfrak{p}_k \subset \mathfrak{p}$. Par primalité, il existe $j \in \{1, \ldots, k\}$ avec $\mathfrak{p}_j \subset \mathfrak{p}$, et par minimalité, $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_j$. D'où le résultat.

Exercice 3.

Le but de cet exercice est de déterminer la forme des idéaux premiers et maximaux de $\mathbb{Z}[X]$. Soit I un idéal premier.

1. Montrer que $I \cap \mathbb{Z}$ est un idéal premier de $\mathbb{Z}$.

   > Si $xy \in I \cap \mathbb{Z}$, avec $x, y \in \mathbb{Z}$, alors $xy \in I$ premier, donnc x ou $y \in I$, et x ou $y \in I \cap \mathbb{Z}$.

2. On suppose que $I \cap \mathbb{Z} = 0$ et on note $\widetilde{I} = I\mathbb{Q}[X]$ l'idéal engendré par I dans $\mathbb{Q}[X]$. Montrer que $\widetilde{I} \cap \mathbb{Z}[X] = I$. En déduire que I est principal engendré par un polynôme non constant irréductible et primitif.

   > Premièrement, si $P \in I$, alors $P/c(P) \in I$, où $c(P)$ est le contenu de P. En effet, sinon, $P = c(P) \times P/c(P) \in I$ avec aucun des deux termes dans I, et $\mathbb{Z}[X]/I$ non intègre, en contradiction avec I premier.
   > Soit $P \in \widetilde{I} \cap \mathbb{Z}[X]$. Alors il existe $P' \in I$ et $Q \in \mathbb{Q}[X]$ avec $P = P'Q$, et on peut supposer P' primitif, quitte à remplacer P' par $P/c(P)$ et Q par $c(P)Q$. En écrivant $Q = Q'/c(Q)$, on peut trouver un entier $q \in \mathbb{N}^*$ tel que $qP = P'Q'$ avec P', Q' primitifs. Par le lemme de Gauss, $P'Q'$ est primitif, et donc $q = 1$ et $P \in \mathbb{Z}[X]$; d'où le résultat.
   > Comme $\mathbb{Q}$ est un corps, $Q[X]$ est principal et ainsi $\widetilde{I} = (P)$ pour un certain polynôme $P \in \mathbb{Z}[X]$ primitif, et le résultat en découle.

3. On suppose que $I \cap \mathbb{Z} = p\mathbb{Z}$. Montrer que I/pI est un idéal premier de $\mathbb{F}_p[X]$. En déduire que I est engendré soit par p, soit par p et un polynôme unitaire dont la réduction modulo p est irréductible.
4. Parmi les idéaux trouvés, lesquels sont maximaux ?
5. En s'inspirant de cette méthode, montrer que les idéaux premiers de $\mathbb{C}[X, Y]$ sont soit principaux, soit de la forme $(X - a, Y - b)$. Quels sont les idéaux maximaux ?

   De la même manière, on montre que les idéaux premiers sont de trois types :
   (a) (0),
   (b) $(P(Y))$ avec $P(Y)$ irréductible.
   (c) $(P(X), Q(Y))$ avec $P(X)$ premier et $Q(Y)$ irréductible dans $\mathbb{C}[X, Y]/(P(X))$

Exercice 4.

Donner les degrés des extensions suivantes et en donner des bases.

1. $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]/\mathbb{Q}$, $\mathbb{Q}[\sqrt[3]{2}]/\mathbb{Q}$, $\mathbb{Q}[\sqrt{2}, \sqrt[3]{2}]/\mathbb{Q}$, $\mathbb{Q}[\sqrt{2}, \sqrt[3]{2}]/\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ et $\mathbb{Q}[\sqrt{2}, \sqrt[3]{2}]/\mathbb{Q}[\sqrt[3]{2}]$.
2. $\mathbb{Q}[\sqrt{2}, \sqrt{3}]/\mathbb{Q}$, $\mathbb{Q}[\sqrt{2}, \sqrt{3}]/\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ et $\mathbb{Q}[\sqrt{2}, \sqrt{3}]/\mathbb{Q}[\sqrt{3}]$.
   Comparer $\mathbb{Q}[\sqrt{2} + \sqrt{3}]$ à $\mathbb{Q}[\sqrt{2}, \sqrt{3}]$ et donner le polynôme minimal de $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ sur $\mathbb{Q}$.
3. $\mathbb{Q}[j]/\mathbb{Q}$, pour $j = e^{2i\pi/3}$. A-t-on $\sqrt{3} \in \mathbb{Q}[j]$? $i \in \mathbb{Q}[j]$? $j \in \mathbb{Q}[i]$?
4. $\mathbb{Q}[\sqrt{3}, j]/\mathbb{Q}$, $\mathbb{Q}[\sqrt{3}, i, j]/\mathbb{Q}$ et $\mathbb{Q}[\sqrt{3} + i]/\mathbb{Q}$.
5. $\mathbb{Q}\left[\cos \frac{2\pi}{3}\right]/\mathbb{Q}$, $\mathbb{Q}\left[\sin \frac{2\pi}{3}\right]/\mathbb{Q}$, $\mathbb{Q}\left[\cos \frac{2\pi}{5}\right]/\mathbb{Q}$ et $\mathbb{Q}\left[\sin \frac{2\pi}{5}\right]/\mathbb{Q}$.

Exercice 5.

On considère le nombre de Liouville $\ell = \sum_{n \geqslant 0} 10^{-n!}$.

1. Soit $x \in \mathbb{C}$ un nombre algébrique sur $\mathbb{Q}$ de degré $n \geqslant 2$. Montrer qu'il existe $C > 0$ tel que pour tout nombre rationnel $\frac{p}{q}$, alors $|x - \frac{p}{q}| \geqslant \frac{C}{q^n}$.
2. En déduire que ℓ est transcendant sur $\mathbb{Q}$.

Exercice 6.

1. Soit L/K une extension algébrique. Montrer que si $f : L \to L$ est un morphisme de corps K-linéaire, f est un automorphisme.
2. Soit $K \subset K' \subset K''$ trois corps. On suppose que l'extension K'/K est algébrique. Montrer que tout élement $a \in K''$ algébrique sur K' est algébrique sur K.
3. Soit L/K une extension et $x \in L$ algébrique sur K, de degré impair. Montrer que x^2 est également algébrique sur K et que $K[x^2] = K[x]$.
4. Montrer que $\mathbb{Q}$ possède des extensions de tout degré.
5. Charles Hermite a démontré en 1873 que e est un nombre transcendant sur $\mathbb{Q}$; en 1882, Ferdinand von Lindemann a démontré la même chose pour π. En admettant ces résultats, montrer que $e+\pi$ et $e\pi$ ne peuvent pas être simultanément algébriques sur $\mathbb{Q}$.