Extensions algébriques.

Exercice 1.

1. Une extension de degré fini est-elle nécessairement algébrique ?
   Oui. L/K extension de degré fini. Alors pour $\alpha \in L$, $K[\alpha]$ de dimension finie sur K donc α algébrique sur K.
2. Une extension algébrique est-elle nécessairement de degré fini ?
   Non. La clôture algébrique de $\mathbb{Q}$ est une extension algébrique de $\mathbb{Q}$. Elle est de degré infini car admet la sous-extension $\mathbb{Q}[2^{1/n}]/\mathbb{Q}$ pour tout $n \geqslant 1$, qui est de degré n car le polynôme $X^n - 2$ est irréductible sur $\mathbb{Q}$ car c'est un polynôme primitif de $\mathbb{Z}[X]$, également irréductible dans $\mathbb{Z}[X]$ par Eisenstein.
3. Soit E une extension algébrique de F. Montrer que tout sous-anneau de E contenant F est un corps. Est-ce encore vrai si l'on ne suppose plus E algébrique sur F ?
   Soit A sous-anneau de E contenant F et $a \in A$ non nul. Alors A contient $F[a]$ qui est $F(a)$ par algébraïcité de a sur F. Donc a a un inverse dans A.
   Ne marche plus si E n'est pas algébrique : soit $\xi \in E$ transcendant sur F, ce qui équivaut à $F[\xi] \neq F(\xi)$. En particulier, $F[\xi]$ sous-anneau de E contenant F qui n'est pas un corps, puisque distinct de $F(\xi)$.
4. Soit K un corps. Déterminer les éléments de $K(X)$ algébriques sur K.
   Les constantes sont algébriques. Les $\beta \in K(X)$ non constantes sont transcendants puisque $K(\beta)$ contient des fractions rationnelles de degré arbitrairement grand, donc n'est pas de dimension finie.

Exercice 2. Soit K un corps et $\beta \in K(X)$ une fraction rationnelle non constante. Montrer que l'extension $K(X)/K(\beta)$ est algébrique.

Notons $\beta = A(X)/B(X)$ avec A et B polynômes premiers entre eux et pas tous deux constants. Alors X est une racine du polynôme $B(T) - A(T)\beta \in K(X)[T]$. Ce polynôme est non nul car sinon on aurait $B(T) = A(T)\beta$, où β inversible dans $K(X)[T]$. Ceci est impossible car $A(T)$ et $B(T)$ sont premiers entre eux dans $K(X)[T]$, puisqu'ils le sont dans $K[T]$ et donc y vérifient une relation de Bézout, qui est *a fortiori* une relation de Bézout dans $K(X)[T]$.

En conclusion, X est racine d'un polynôme non nul de $K(\beta)[T]$, c'est-à-dire que c'est un algébrique de $K(\beta)$. Les tels algébriques forment un sous-corps de $K(X)$, contenant X, c'est donc $K(X)$. Donc l'extension $K(X)$ est algébrique sur $K(\beta)$

Exercice 3. Donner les degrés des extensions suivantes et en donner des bases.

1. $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]/\mathbb{Q}$, $\mathbb{Q}[\sqrt[3]{2}]/\mathbb{Q}$, $\mathbb{Q}[\sqrt{2}, \sqrt[3]{2}]/\mathbb{Q}$, $\mathbb{Q}[\sqrt{2}, \sqrt[3]{2}]/\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ et $\mathbb{Q}[\sqrt{2}, \sqrt[3]{2}]/\mathbb{Q}[\sqrt[3]{2}]$.
2. $\mathbb{Q}[\sqrt{2}, \sqrt{3}]/\mathbb{Q}$, $\mathbb{Q}[\sqrt{2}, \sqrt{3}]/\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ et $\mathbb{Q}[\sqrt{2}, \sqrt{3}]/\mathbb{Q}[\sqrt{3}]$. Comparer $\mathbb{Q}[\sqrt{2}+\sqrt{3}]$ à $\mathbb{Q}[\sqrt{2}, \sqrt{3}]$ et donner le polynôme minimal de $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ sur $\mathbb{Q}$.
3. $\mathbb{Q}[j]/\mathbb{Q}$, pour $j = e^{2i\pi/3}$. A-t-on $\sqrt{3} \in \mathbb{Q}[j]$? $i \in \mathbb{Q}[j]$? $j \in \mathbb{Q}[i]$?
4. $\mathbb{Q}[\sqrt{3}, j]/\mathbb{Q}$, $\mathbb{Q}[\sqrt{3}, i, j]/\mathbb{Q}$ et $\mathbb{Q}[\sqrt{3} + i]/\mathbb{Q}$.
5. $\mathbb{Q}\left[\cos\frac{2\pi}{3}\right]/\mathbb{Q}$, $\mathbb{Q}\left[\sin\frac{2\pi}{3}\right]/\mathbb{Q}$, $\mathbb{Q}\left[\cos\frac{2\pi}{5}\right]/\mathbb{Q}$ et $\mathbb{Q}\left[\sin\frac{2\pi}{5}\right]/\mathbb{Q}$.

Exercice 4.

1. Soit $K = \mathbb{F}_q$ un corps fini de caractéristique différente de 2. Montrer qu'un carré dans $K^\times$ a exactement deux racines carrées. En déduire que tous les éléments de K sont des sommes de deux carrés dans K.
   Le premier point vient de ce que $X^2 - a^2$ a exactement pour racines a et $-a$, qui sont distinctes dès que $a \neq 0$ et $\mathrm{car}(K) \neq 2$.

On en déduit que pour $x \in K$ les applications $a \mapsto a^2$ et $b \mapsto c - b^2$ sont 2-to-1, hormis pour l'image de 0 qui n'a que 0 comme préimage. Donc les images de ces deux applications sont toutes deux de cardinal $1 + (q-1)/2$, ce qui impose que ces deux images ne soient pas disjointes car $2 \times (1 + (q-1)/2) = q + 1 > q = \#K$. Donc il existe a, b tels que $a^2 = x - c^2$. CQFD.

2. Qu'en est-il pour K corps fini de caractéristique 2 ?

   Le Frobenius est un automorphisme, donc tous les éléments sont des carrés.

Exercice 5. 1. Soit L/K une extension algébrique. Montrer que si $f : L \to L$ est un morphisme de corps K-linéaire, f est un automorphisme.

2. Soit $K \subset K' \subset K''$ trois corps. On suppose que l'extension K'/K est algébrique. Montrer que tout élement $a \in K''$ algébrique sur K' est algébrique sur K.
3. Soit L/K une extension et $x \in L$ algébrique sur K, de degré impair. Montrer que x^2 est également algébrique sur K et que $K[x^2] = K[x]$.
4. Montrer que $\mathbb{Q}$ possède des extensions de tout degré.
5. Charles Hermite a démontré en 1873 que e est un nombre transcendant sur $\mathbb{Q}$; en 1882, Ferdinand von Lindemann a démontré la même chose pour π. En admettant ces résultats, montrer que $e + \pi$ et $e\pi$ ne peuvent pas être simultanément algébriques sur $\mathbb{Q}$.

Exercice 6. Soient K un corps, P un polynôme de $K[X]$ de degré n et de racines $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ dans une clôture algébrique de K. On pose $L = K(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$. Montrer que $[K : L] \leqslant n!$.