
Groupes de Galois

Exercice 1.

Soit $P = X^5 - 6X + 3 \in \mathbb{Q}[X]$.

1. Montrer que P est irréductible.
2. Montrer que P possède trois racines réelles et deux racines complexes conjuguées.
3. Soit K un corps de décomposition de P , et $G = \text{Gal}(K/\mathbb{Q})$. Montrer que G est isomorphe à $\mathfrak{S}_5$.
4. En déduire la forme des sous-extensions galoisiennes de K .

Exercice 2.

Soit Ω un corps algébriquement clos de caractéristique nulle, et $K \subset \Omega$ un sous-corps tel que $[\Omega : K] < +\infty$. Le but de cet exercice est de prouver que $\Omega = K(\sqrt{-1})$.

1. Montrer que Ω/K est une extension galoisienne.
Soit i une racine de $X^2 + 1$ dans Ω , et soit $G = \text{Gal}(\Omega/K(i))$. On suppose que G n'est pas trivial. Soit p un diviseur premier de $|G|$.
2. Montrer qu'il existe une sous-extension de corps $K(i) \subset L \subset \Omega$ telle que Ω/L est galoisienne de degré p .
3. Montrer qu'il existe $a \in L$ tel que $X^p - a$ est irréductible dans $L[X]$ et tel que Ω soit un corps de décomposition de $X^p - a$.
4. On suppose que $p \neq 2$. Calculer $\prod_{\sigma \in \text{Gal}(\Omega/L)} \sigma(\alpha)$, pour α racine de $X^p - a$.
5. Conclure.

Exercice 3.

Soit L/K une extension galoisienne de groupe de Galois G . Soit $x \in L$. Montrer que $K[x] = L^{\text{Stab}(x)}$.

Exercice 4.

Soit L un corps de décomposition de $X^4 - 6 \in \mathbb{Q}[X]$.

1. Montrer que $L = \mathbb{Q}(\sqrt[4]{6}, i)$, et calculer $[L : \mathbb{Q}]$.
2. Soit $G = \text{Gal}(L/\mathbb{Q})$. Montrer qu'il existe deux éléments $r, s \in G$, tels que

$$r(\sqrt[4]{6}) = i\sqrt[4]{6}, \quad r(i) = i, \quad s(\sqrt[4]{6}) = \sqrt[4]{6}, \quad s(i) = -i,$$

et en déduire un isomorphisme $G \simeq D_8$.

3. Expliciter la correspondance de Galois et en déduire parmi les sous-extensions de L lesquelles sont galoisiennes.